Kinematika

• **hmotný bod:** těleso s nekonečně malými rozměry, ale nenulovou hmotností,
tj. žádné otáčení, žádná deformace atd.

• popis pohybu hmotného bodu – tj. poloha hmotného bodu v závislosti na čase

• polohový (radius) vektor $\vec{r}$

• **trajektorie**: křivka, kterou vytváří koncový bod polohového vektoru

• parametrické vyjádření trajektorie $\vec{r} = \vec{r}(t)$

kartézské souřadnice	cylindrické souřadnice	sférické souřadnice
$x = x(t)$	$\rho = \rho(t)$	$r = r(t)$
$y = y(t)$	$\varphi = \varphi(t)$	$\vartheta = \vartheta(t)$
$z = z(t)$	$z = z(t)$	$\varphi = \varphi(t)$

Opakování - Kartézská soustava souřadnic

• **polohový (radius) vektor**

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = (x, y, z)$$

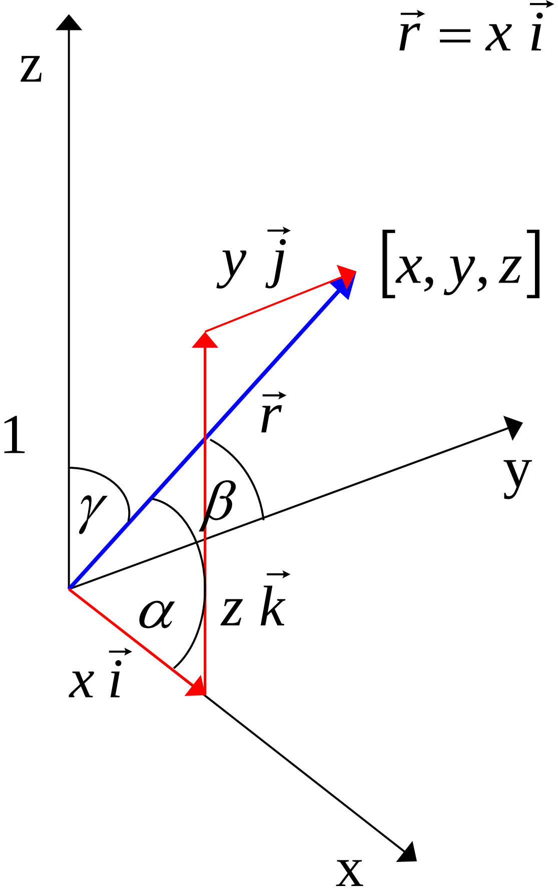
směrové kosiny:

$$\vec{r}\,\vec{i} = x = r\cos\alpha$$

$$\vec{r}\,\vec{j} = y = r\cos\beta$$

$$\vec{r}\,\vec{k} = z = r\cos\gamma$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

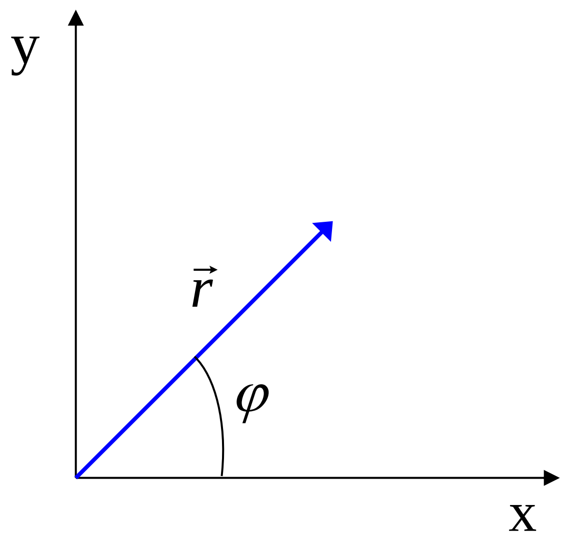


velikost polohového vektoru:

$$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Opakování - Polární souřadnice

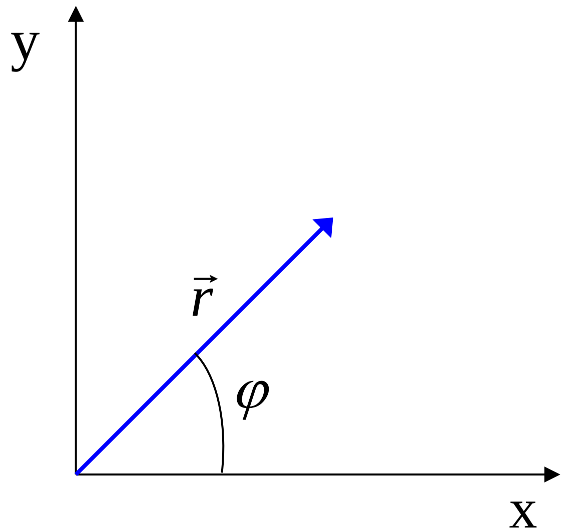
- kartézské souřadnice: x, y
- obecné souřadnice: r, φ



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Kruhový pohyb



polární souřadnice

$$r(t) = r$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos\varphi = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin\varphi = r\sin(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost

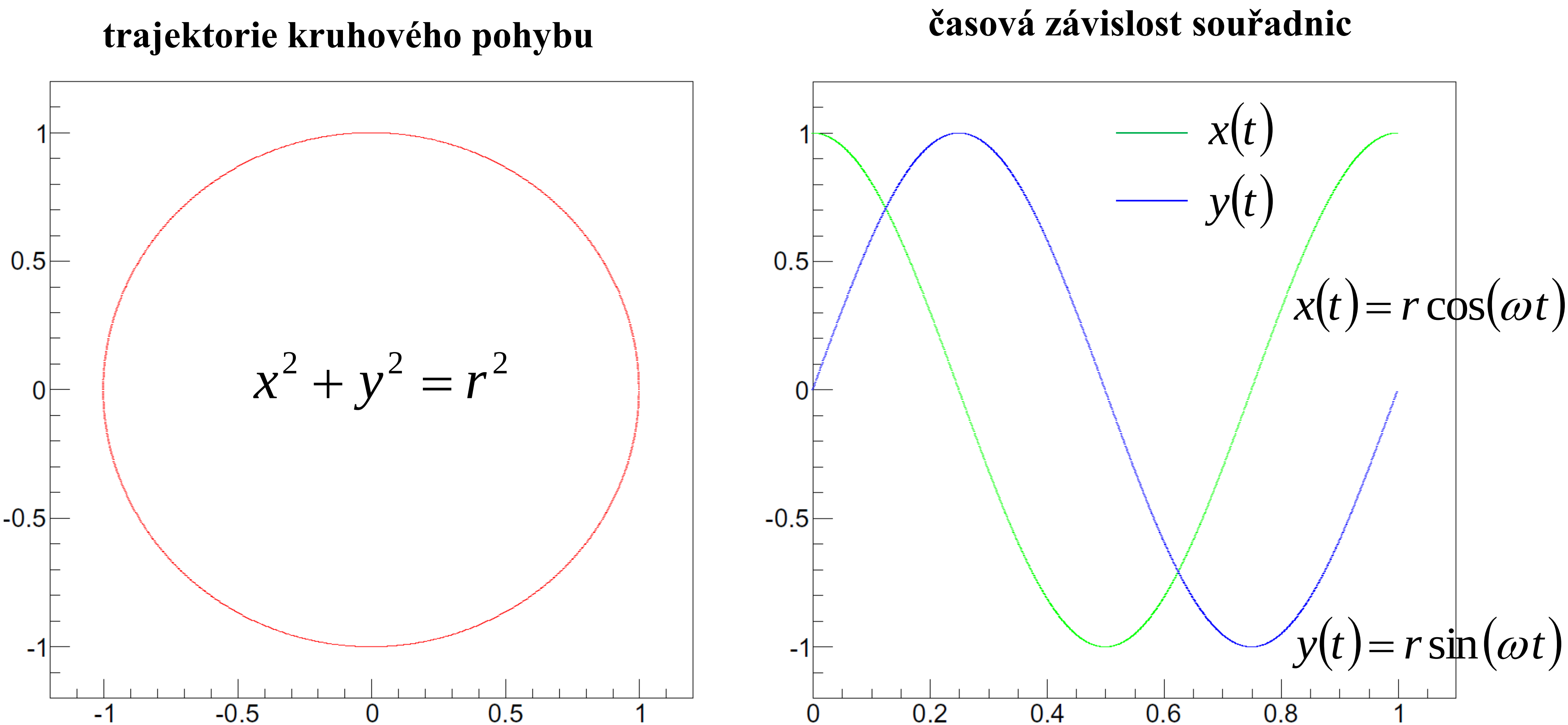
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{1}{f}$$ - perioda

• Neparametrickou rovnici dráhy pohybu (kružnici) lze získat vyloučením parametru *t:*

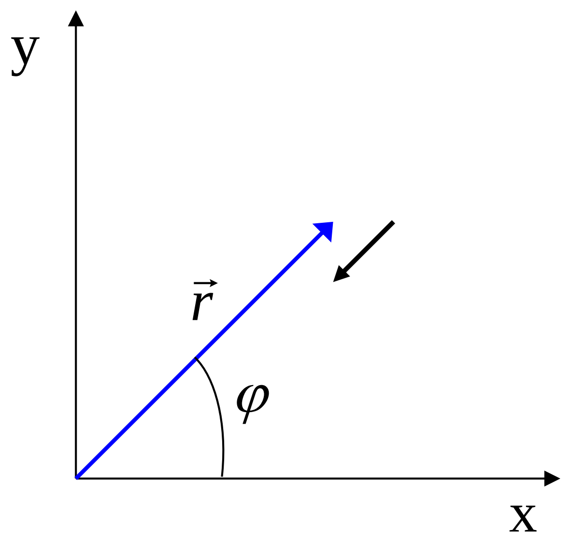
$$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2\cos^2(\omega t) + r^2\sin^2(\omega t) = r^2\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right) = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Kruhový pohyb



Kruhový pohyb + zmenšování *r*



polární souřadnice

$$r(t) = r_0 - v_r t$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos\varphi = (r_0 - v_r t)\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin\varphi = (r_0 - v_r t)\sin(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost

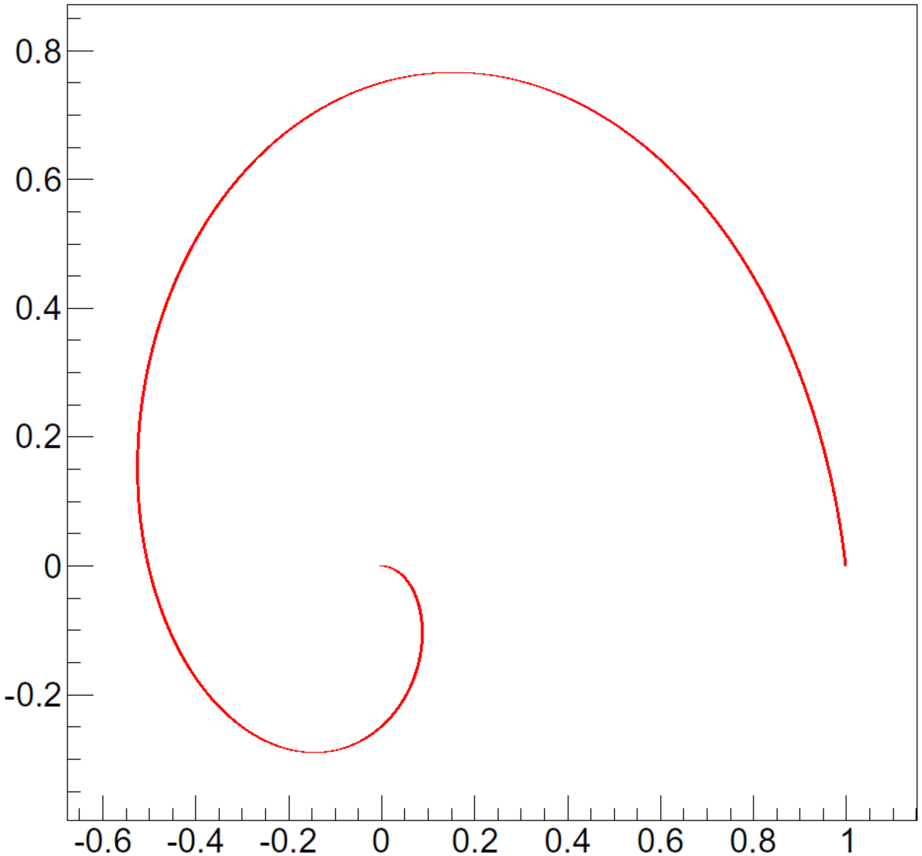
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$ - perioda

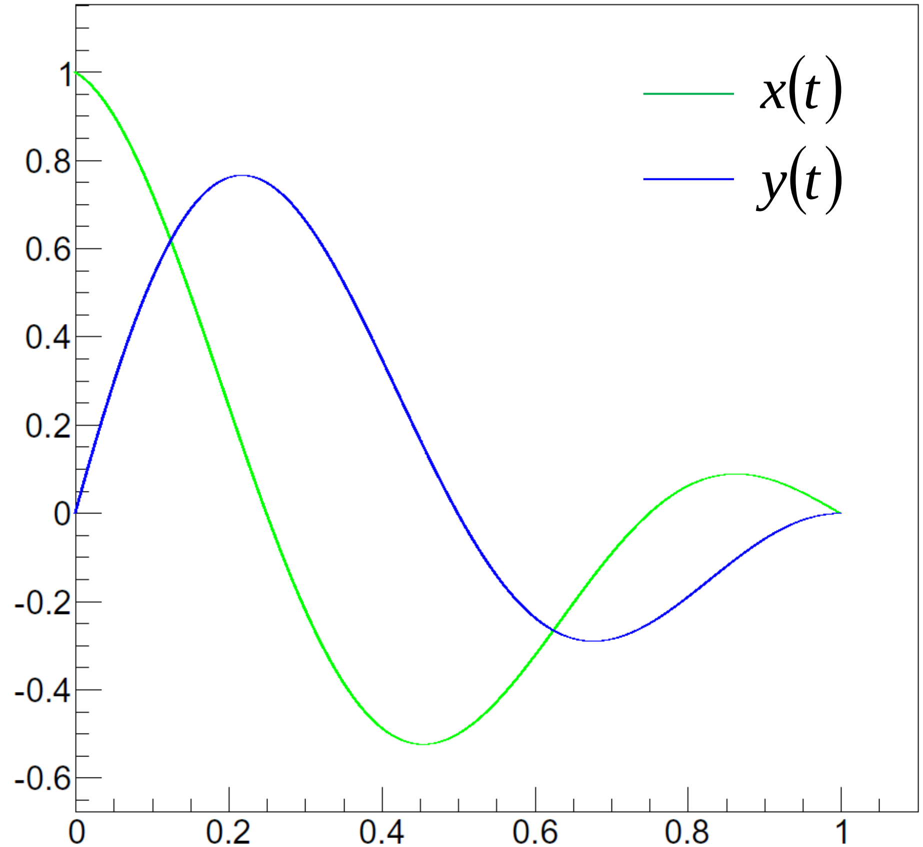
$$r(T) = 0 = r_0 - v_r T \Rightarrow v_r = \frac{r_0}{T}$$

Kruhový pohyb + zmenšování r

$$v_r = \frac{r_0}{T} = \frac{r_0}{2\pi}\omega$$

za jednu otočku: $r_0 \rightarrow 0$

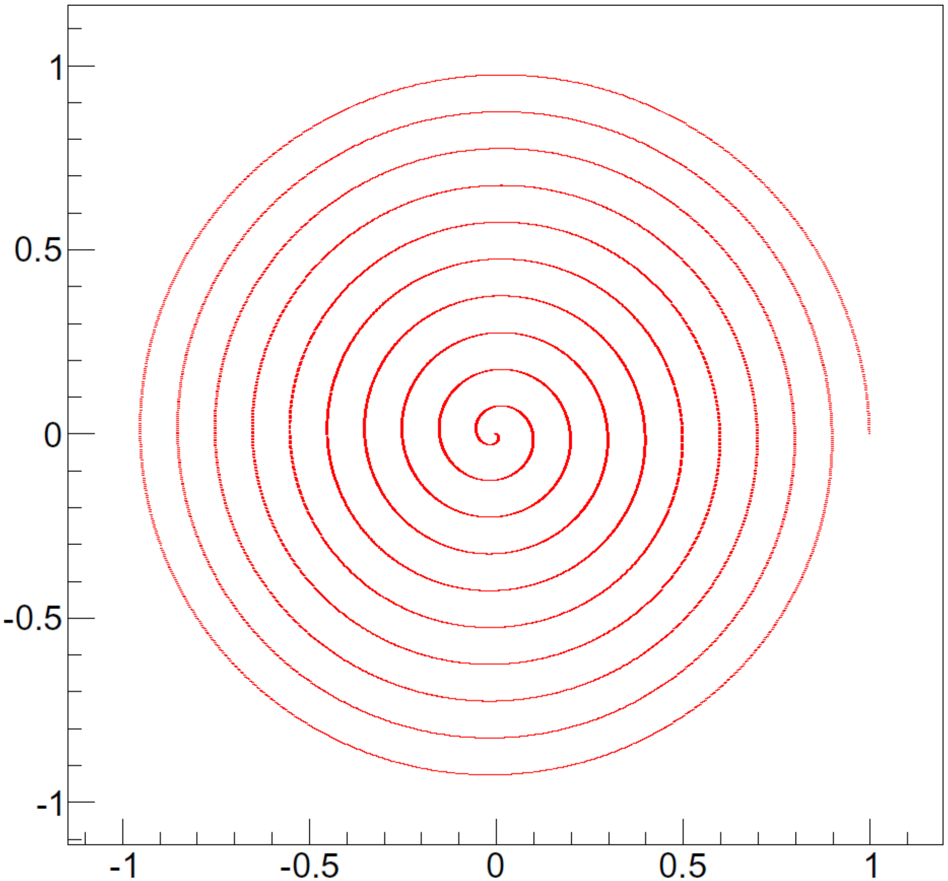


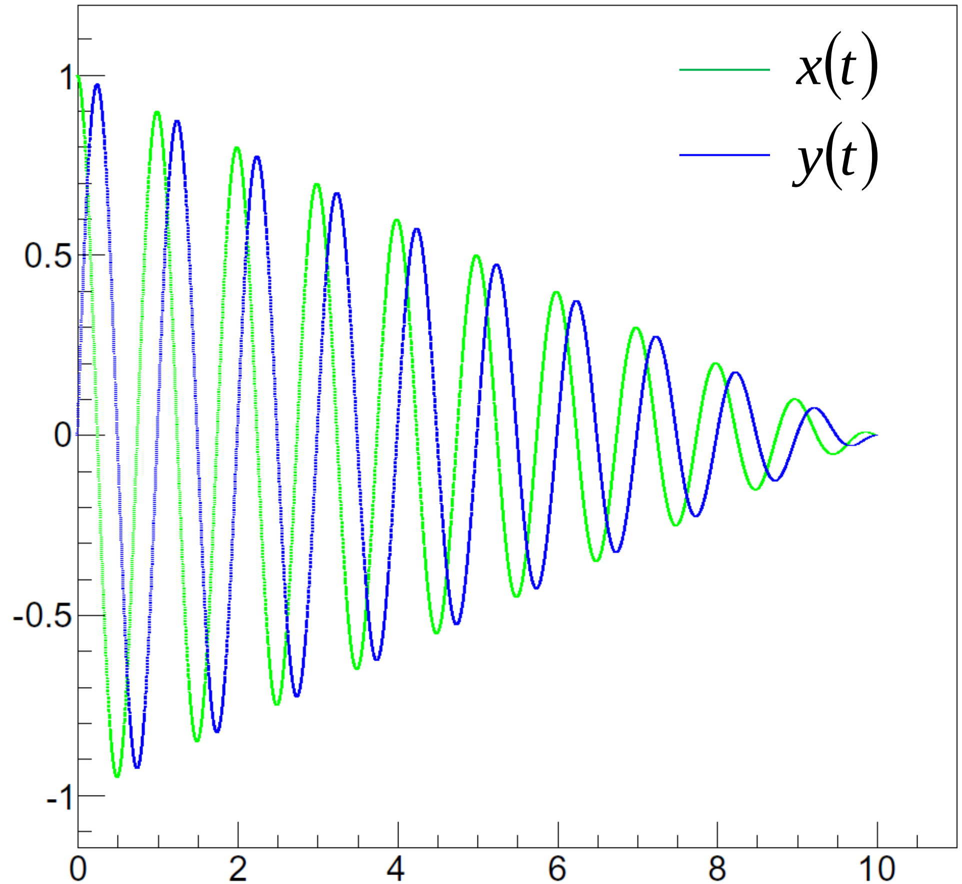


Kruhový pohyb + zmenšování r

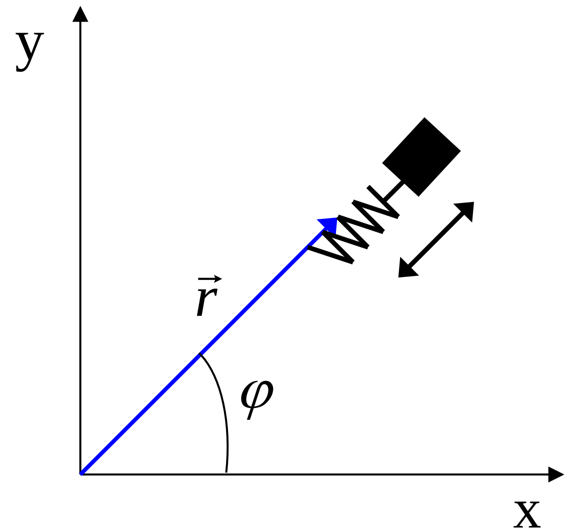
$$v_r = \frac{r_0}{10T} = \frac{r_0}{10}\frac{\omega}{2\pi}$$

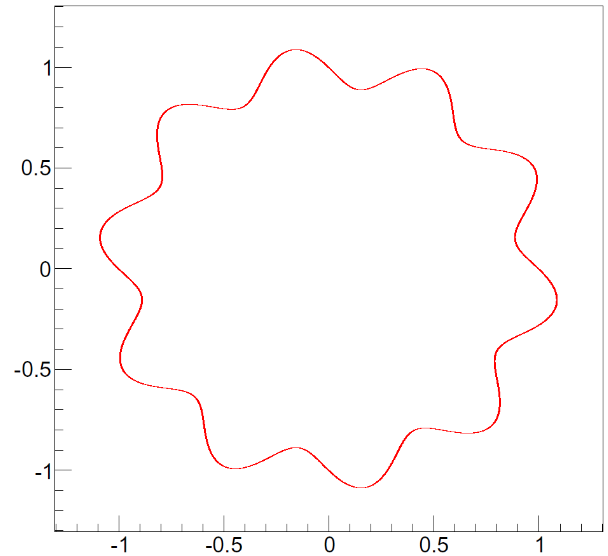
za jednu otočku: $r_0 \to 0.9\, r_0$





Kruhový pohyb + kmity





$$A = 0.1 r_0$$

$$f_r = \frac{10\omega}{2\pi} = 10 f$$

polární souřadnice

$$r(t) = r_0 + A\sin(2\pi f_r t)$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

ω - úhlová rychlost $\quad$ f_r - frekvence kmitů

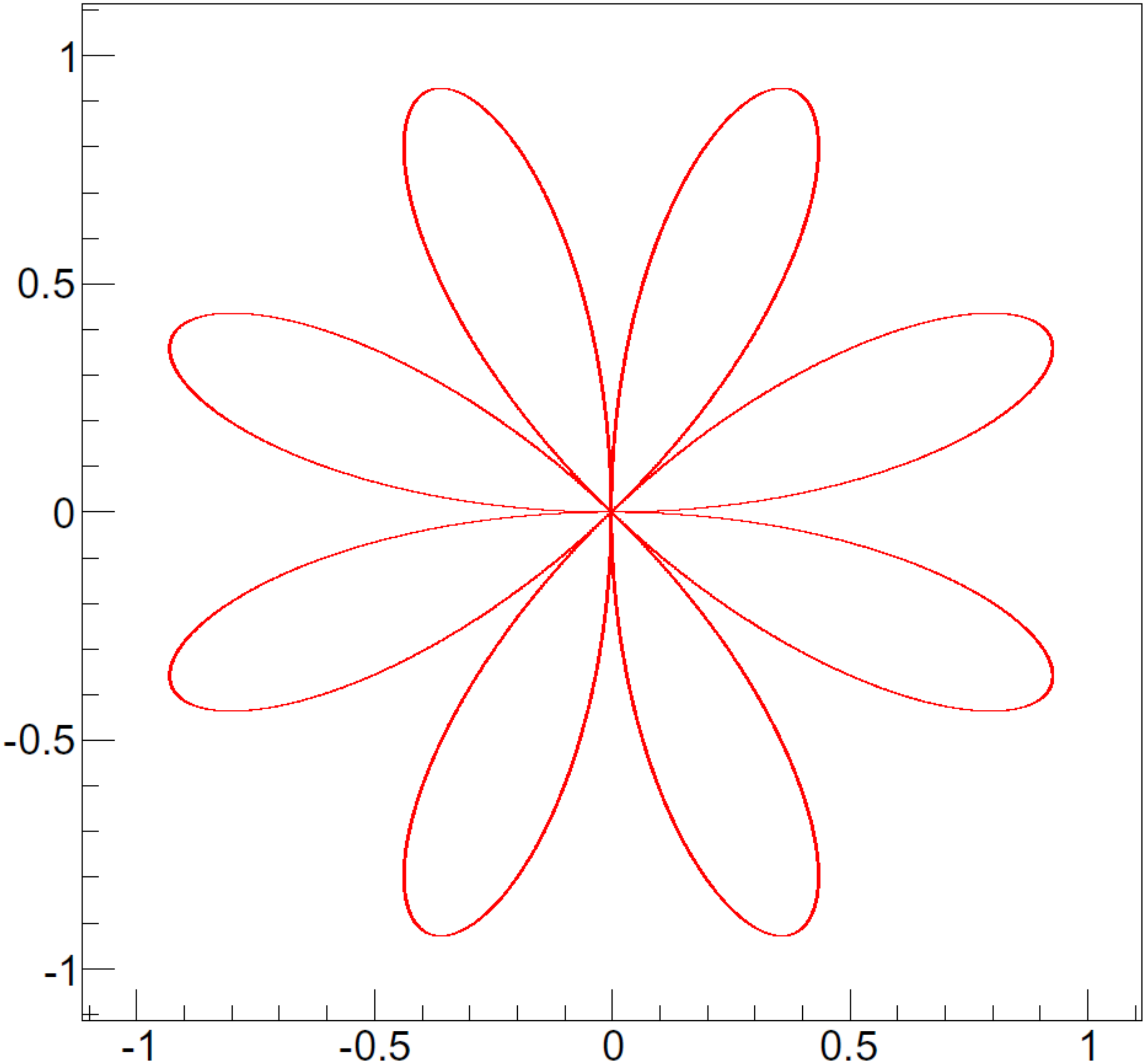
$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}$ - perioda $\quad$ A - amplituda kmitů

kartézské souřadnice

$$x(t) = (r_0 + A\sin(2\pi f_r t))\cos(\omega t)$$

$$y(t) = (r_0 + A\sin(2\pi f_r t))\sin(\omega t)$$

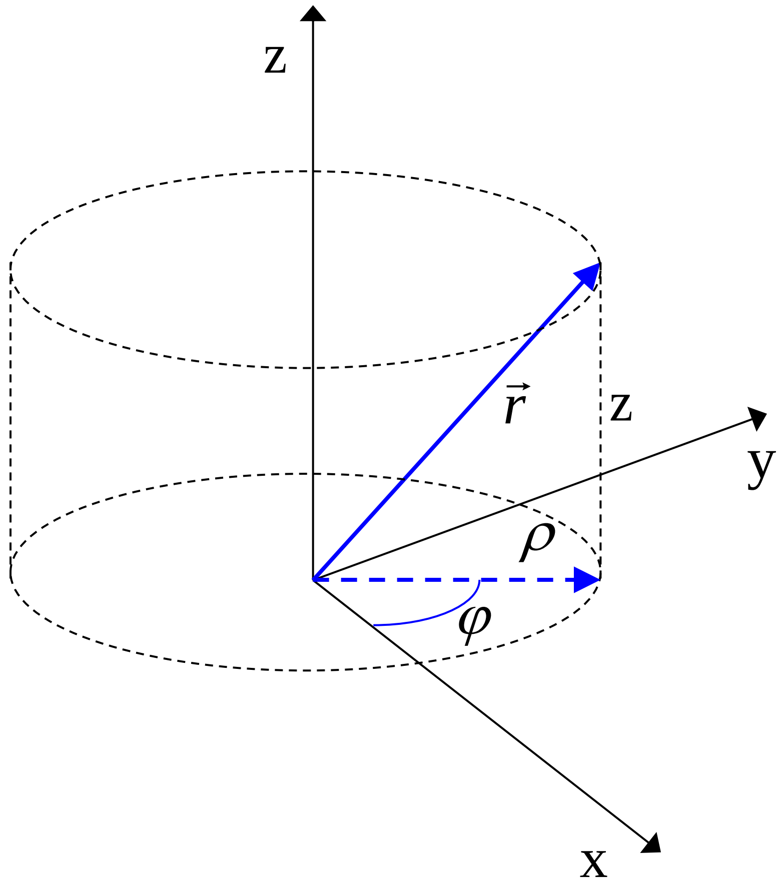
DÚ: Napište parametrické vyjádření trajektorie pomocí polárních a kartézských souřadnic



$r_0 = ?$ $f_r = ?$ $A = ?$

Opakování - Cylindrická soustava souřadnic

- kartézská soustava souřadnic: x, y, z
- cylindrická (válcová) soustava souřadnic: ρ, φ, z



$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$
$$z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$
$$z = z$$

Trajektorie

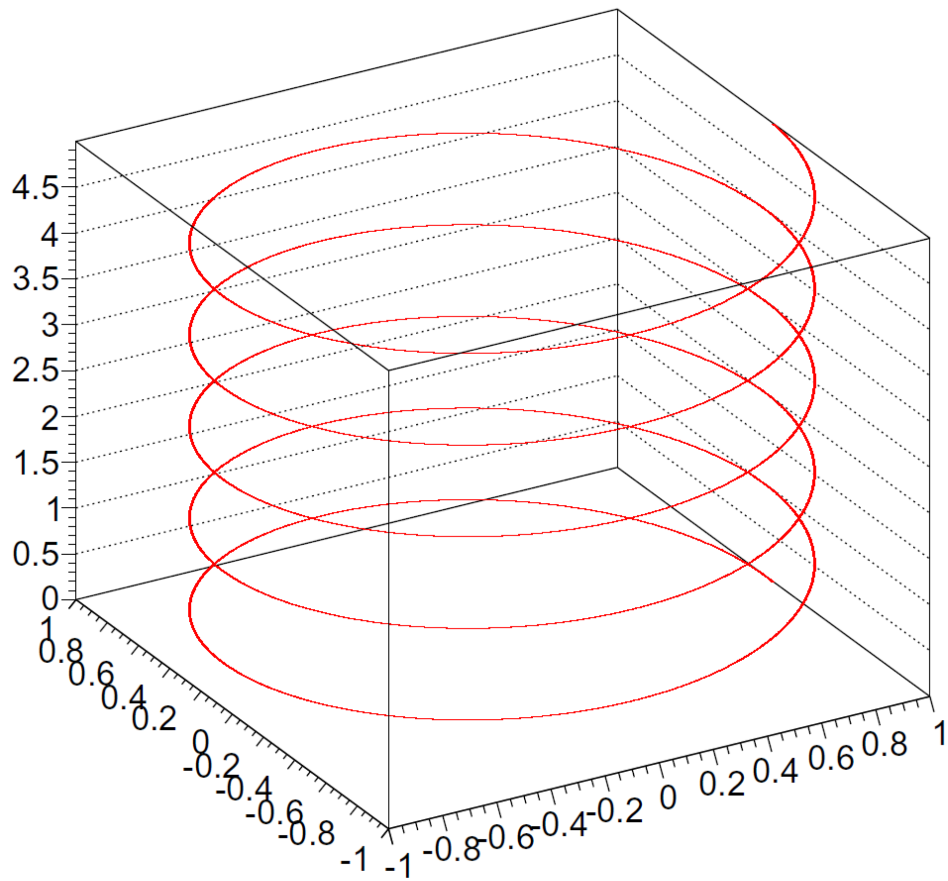
cylindrické souřadnice

$$\rho(t) = \rho$$
$$\varphi(t) = \omega t$$
$$z(t) = vt$$

kartézské souřadnice

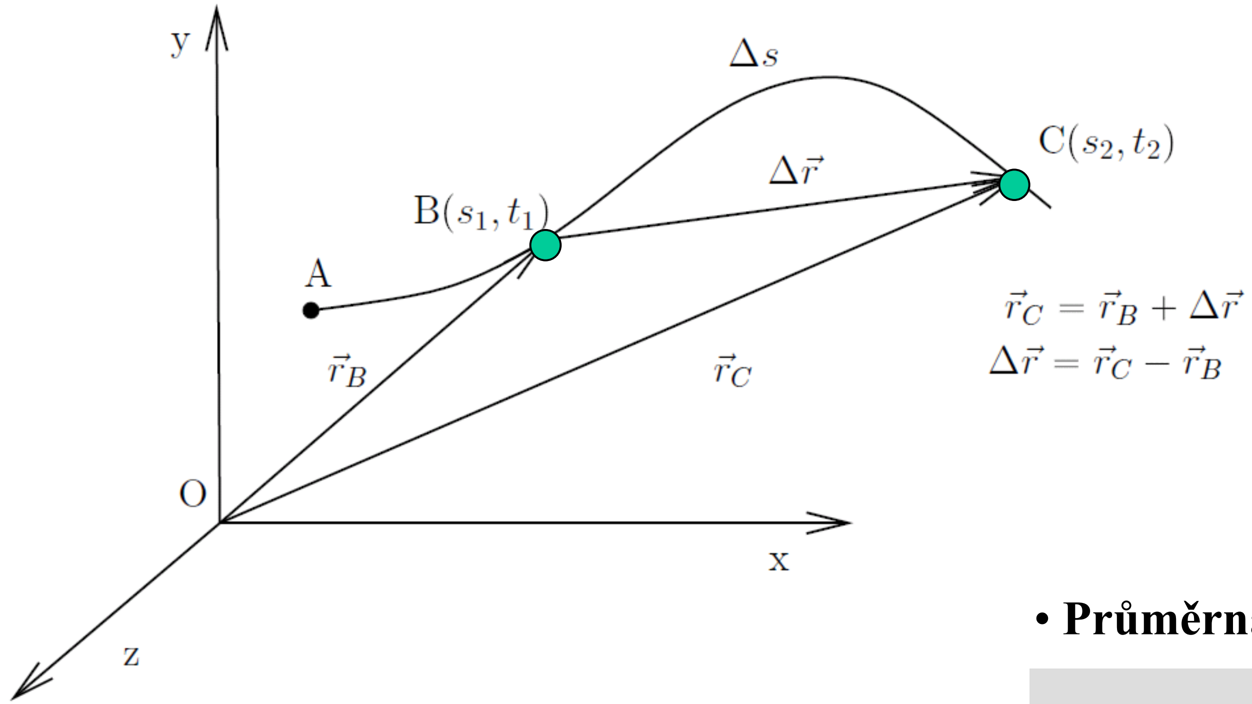
$$x(t) = \rho\cos(\omega t)$$
$$y(t) = \rho\sin(\omega t)$$
$$z(t) = vt$$

$$z(T) = \rho = vT \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\rho}{T}$$



Rychlost

- K popisu časového průběhu pohybu hmotného bodu zavádí **kinematika** veličiny **rychlost** a **zrychlení**.



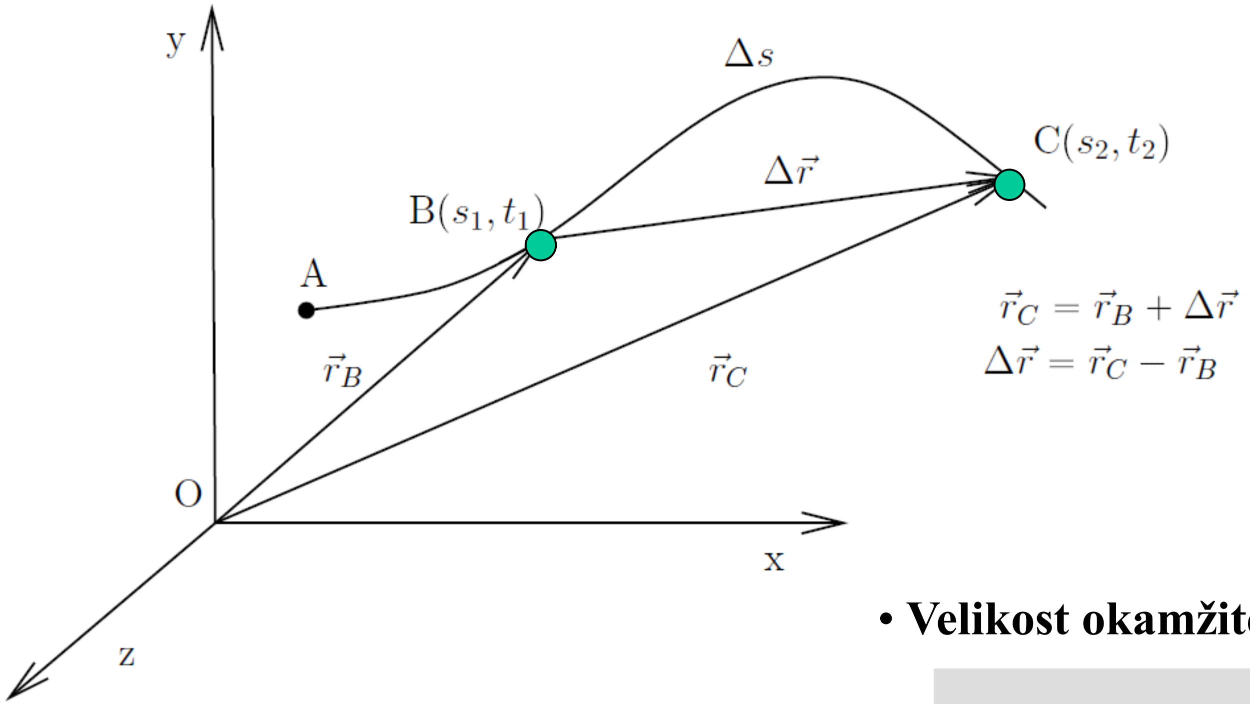
- Přemístíme-li hmotný bod z polohy B do polohy C, proběhl tento bod dráhu: $\Delta s = s_2 - s_1$
  za čas: $\Delta t = t_2 - t_1$

- **Průměrná rychlost hmotného bodu:**

$$v_{12} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Rychlost

- K popisu časového průběhu pohybu hmotného bodu zavádí **kinematika** veličiny **rychlost** a **zrychlení**.



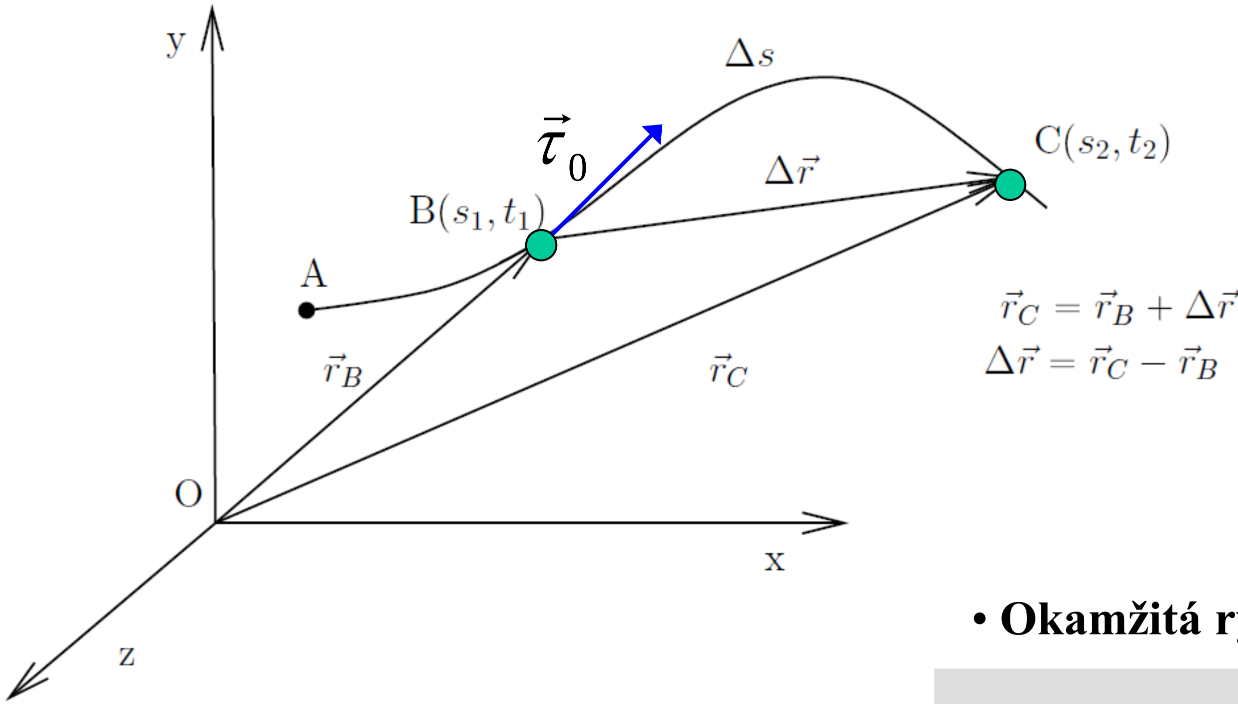
- **Velikost okamžité rychlosti hmotného bodu:**

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} s(t) = \dot{s}$$

- Budeme-li zmenšovat interval $\Delta t = t_2 - t_1$ bude se bod C blížit bodu B v čase t_1

Rychlost

- K popisu časového průběhu pohybu hmotného bodu zavádí **kinematika** veličiny **rychlost** a **zrychlení**.



- Při přibližování bodu C k bodu B přejde $\Delta \vec{r}$ na vektor $d\vec{r}$, který bude mít směr tečny k dráze $\vec{\tau}_0$ a velikost ds.
  Potom:

$$d\vec{r} = ds \cdot \vec{\tau}_0$$

- **Okamžitá rychlost hmotného bodu:**

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Rychlost

Okamžitá rychlost je vektor, který má směr tečny ke křivočaré dráze v místě, ve kterém okamžitou rychlost určujeme, a míří ve směru pohybu**:**

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

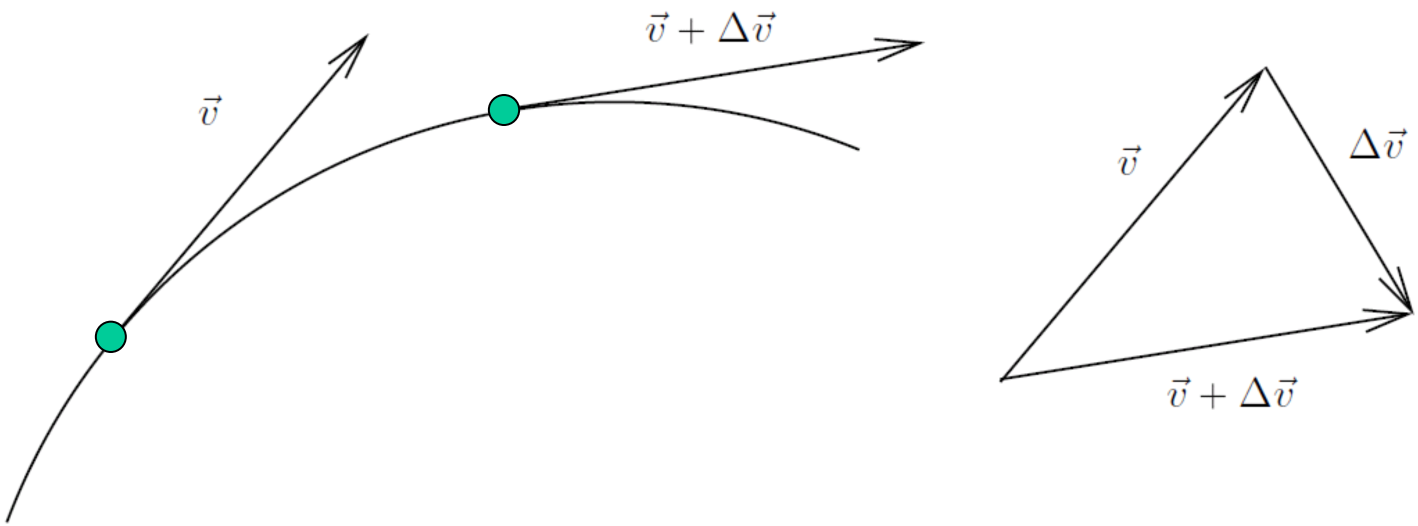
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$$

- **přímočarý pohyb** – nemění se směr rychlosti $\vec{\tau}_0$
- **rovnoměrný pohyb** – nemění se velikost rychlosti:

$$v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad [\mathrm{m/s}]$$

Zrychlení



- při obecném **křivočarém pohybu** se mění jak směr, tak jeho rychlost pohybu hmotného bodu

- **okamžité zrychlení** hmotného bodu**:**

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Zrychlení

• **okamžité zrychlení** hmotného bodu**:**

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

• **zrychlení** hmotného bodu je vektorem jehož směr je totožný s přírůstkem rychlosti $\mathrm{d}\vec{v}$

• **velikost zrychlení**:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} \quad \left[\mathrm{m/s^2}\right]$$

Klasifikace pohybů a jejich příklady

Pohyb dělíme na

- přímočarý, který se děje v přímce
- křivočarý, což jsou všechny ostatní případy.

Dalším kritériem je velikost rychlosti:

- pohyb je rovnoměrný při $|\vec{v}| = konst.$
- pohyb je nerovnoměrný při $|\vec{v}| \neq konst.$

• **Přímočarý rovnoměrný zrychlený pohyb:**

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = at + v_0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a$$

• **Přímočarý pohyb** hmotného bodu**:**

$$x = x(t),\ y = 0,\ z = 0$$

• **Přímočarý rovnoměrný pohyb:**

$$x = v_0 t + x_0$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

Klasifikace pohybů a jejich příklady

- **harmonický pohyb po přímce:**

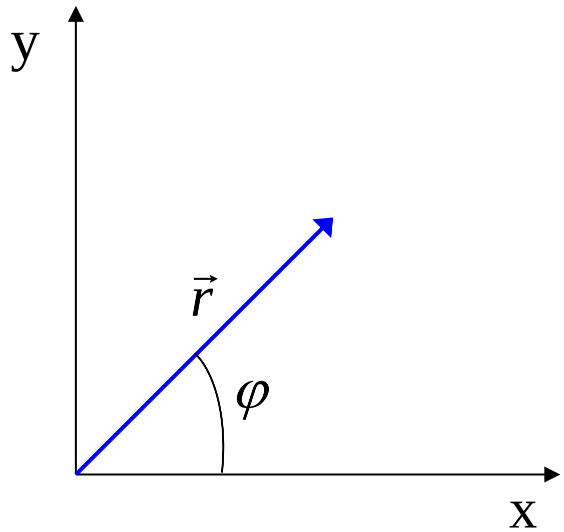
$$x = A\sin\left(\omega t + \alpha\right) + x_0$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\left(\omega t + \alpha\right)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\sin\left(\omega t + \alpha\right) = -\omega^2\left(x - x_0\right)$$

- Zrychlení harmonického pohybu je tedy úměrné výchylce a míří proti ní.

Rovnoměrný pohyb po kružnici



polární souřadnice

$$r(t) = r$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos\varphi = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin\varphi = r\sin(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}$ - perioda

- Neparametrickou rovnici dráhy pohybu (kružnici) lze získat vyloučením parametru *t:*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

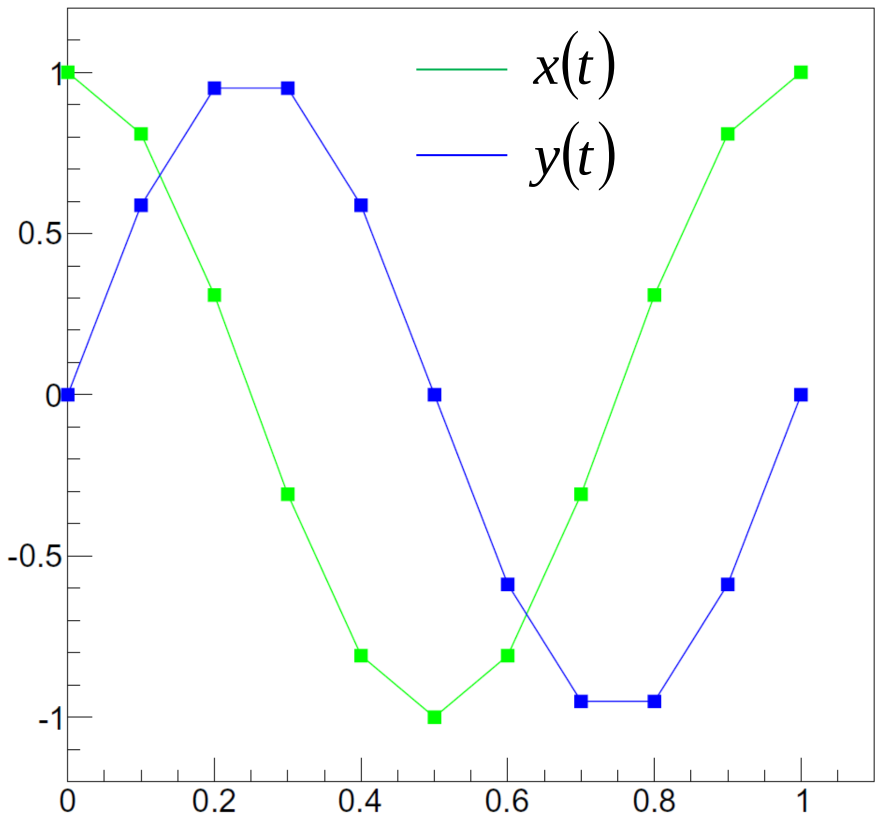
- numerická derivace souřadnic:

$$v_x(t) = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} \qquad v_y(t) = \frac{y(t+dt) - y(t)}{dt}$$

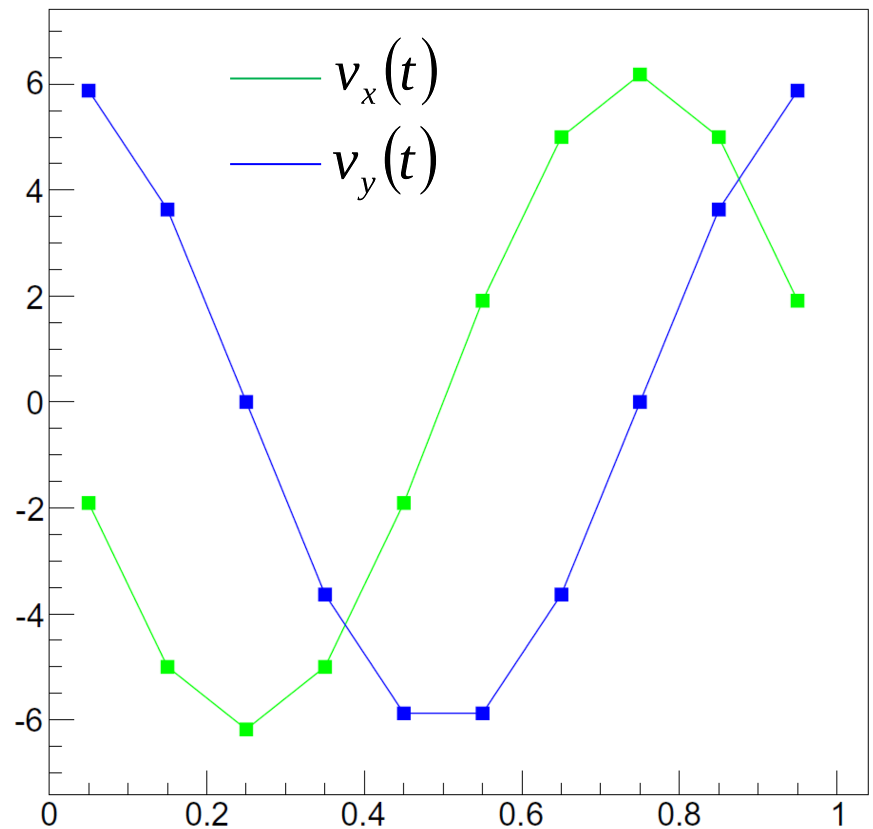
Rovnoměrný pohyb po kružnici

$n = 11$ $dt = 1/10$ $\omega = 2\pi$ $T = 1$

časová závislost souřadnic



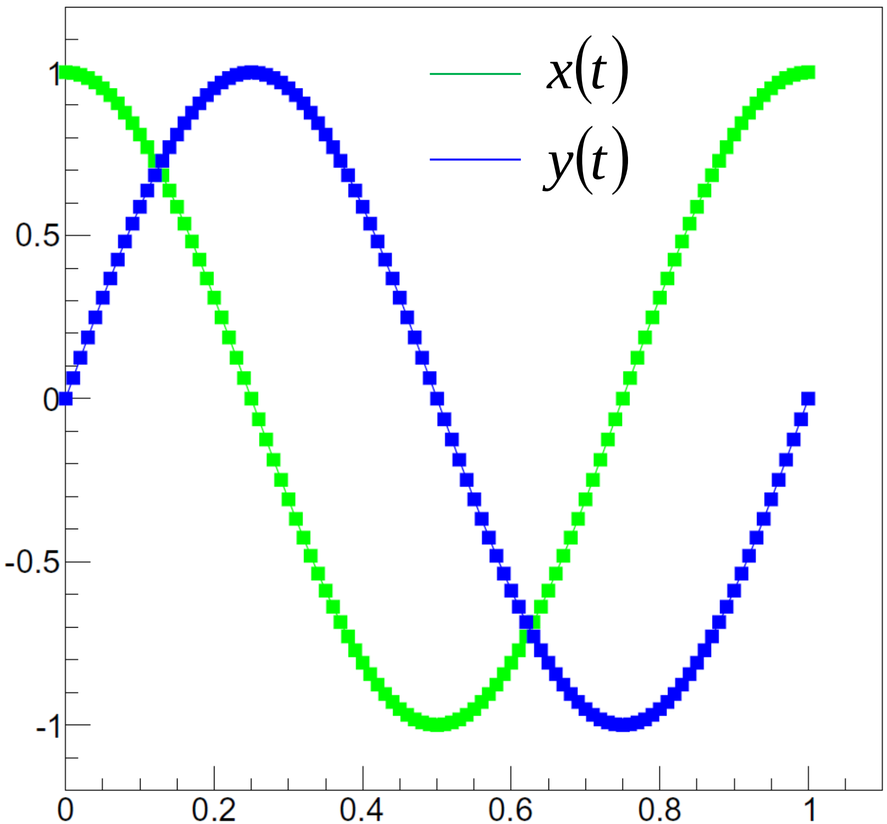
časová závislost složek rychlosti



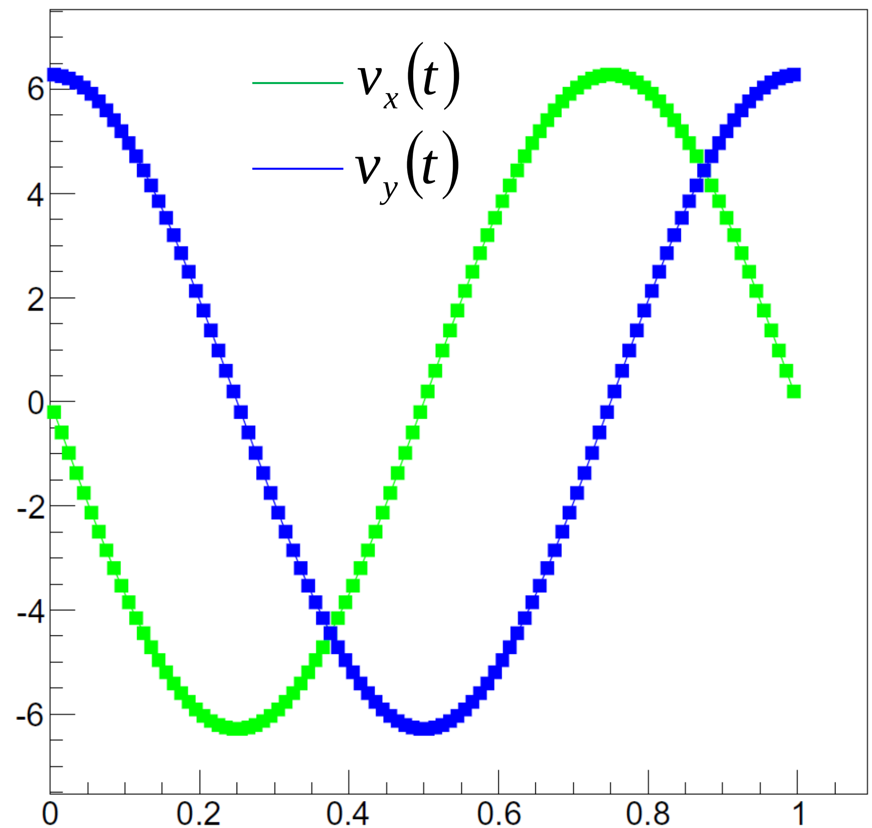
Rovnoměrný pohyb po kružnici

$n = 101 \quad dt = 1/100 \qquad \omega = 2\pi \quad T = 1$

časová závislost souřadnic



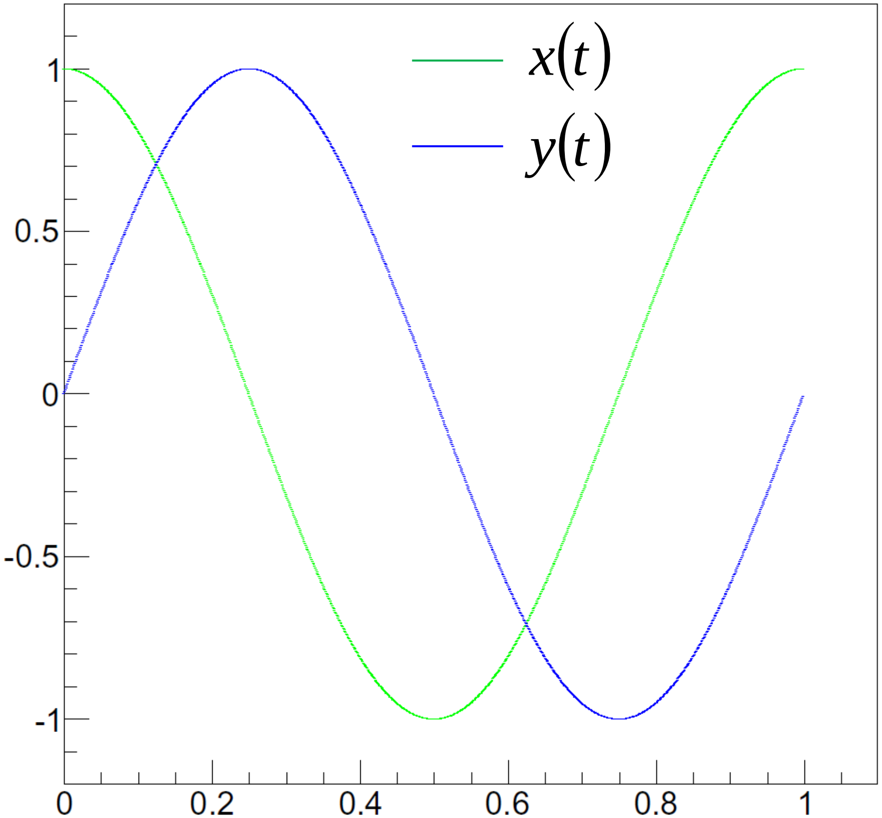
časová závislost složek rychlosti



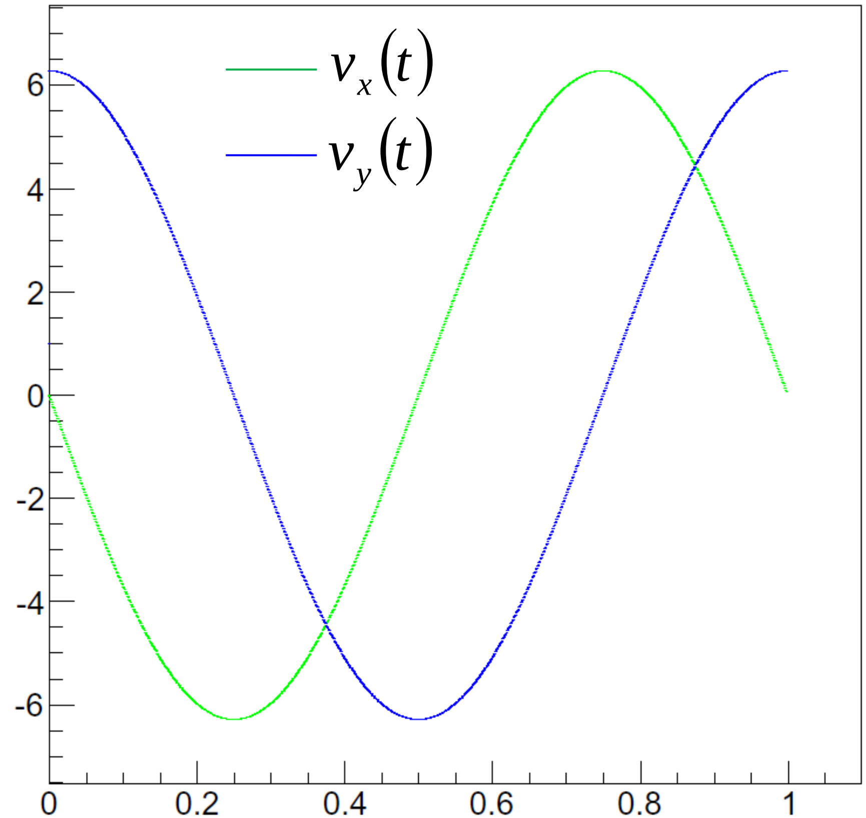
Rovnoměrný pohyb po kružnici

$n = 1001 \quad dt = 1/1000 \qquad \omega = 2\pi \quad T = 1$

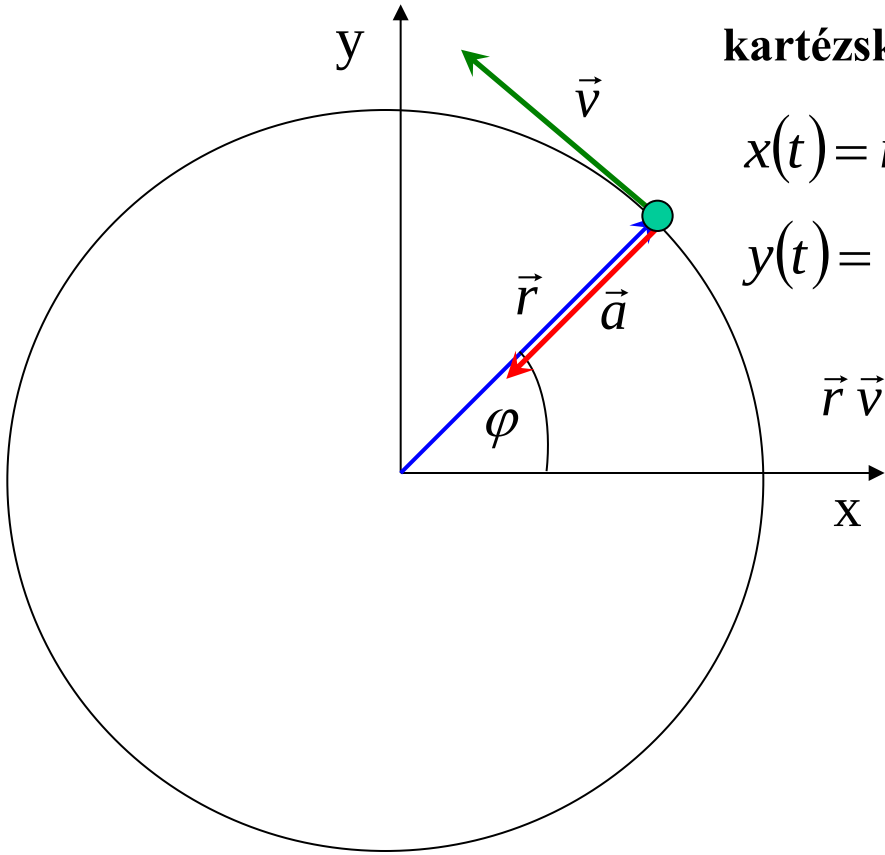
časová závislost souřadnic



časová závislost složek rychlosti



Rovnoměrný pohyb po kružnici



kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin(\omega t)$$

rychlost

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -r\omega\sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = r\omega\cos(\omega t)$$

$$\vec{r}\,\vec{v} = -r^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) + r^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0$$

$$v = \sqrt{\omega^2 r^2\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right)} = \omega r$$

dostředivé (normálové) zrychlení

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -r\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x$$

$$a_y(t) = \ddot{y}(t) = -r\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 y$$

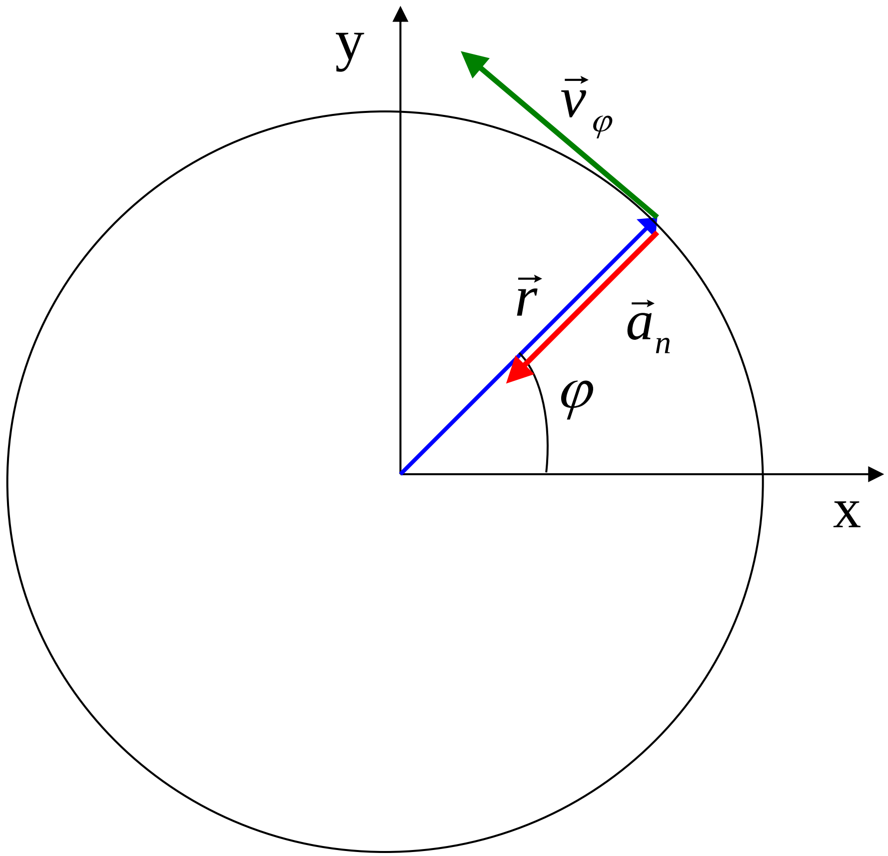
$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

$$a = \sqrt{r^2\omega^4\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right)} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

ω - úhlová rychlost $\quad \omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}$ - perioda

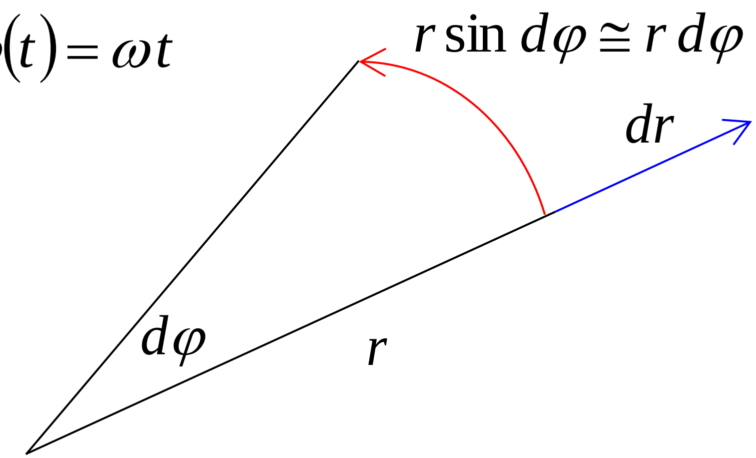
Rovnoměrný pohyb po kružnici



polární souřadnice

$$r(t) = r$$

$$\varphi(t) = \omega t$$



rychlost

$$v_r(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(t) = 0$$ - radiální rychlost

$$v_{\varphi}(t) = r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi(t) = r\omega$$ - tečná (tangenciální rychlost)

ω - úhlová rychlost $\quad \omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - perioda